# RANGO (con determinantes) II

Halla el rango de la matriz A dependiendo del valor del parámetro:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & m^2 & m \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 \\ 8 & 0 & a \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & a & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 2 \\ a & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} a+1 & 1 & 1 & a+1 \\ 1 & a+1 & 1 & a+3 \\ 1 & 1 & 1+a & -2a-4 \end{bmatrix}$

e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 & 7 \\ 5 & -(a+1) & 7 & 8+a \end{pmatrix}$

f) $A = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 & a+2 \\ 1 & 1 & a & -2(a+1) \\ a & 1 & 1 & a \end{bmatrix}$

**SOLUCIONES**

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & m^2 & m \end{pmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$; $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 3 & m \end{vmatrix}_* = 3m+3$; $\quad 3m+3=0 \rightarrow m=-1$

**Si m$\neq -1$, entonces ran (A) = 3**

**Si m = -1**,A=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 5 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$; $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$ (ya estaba hecho en *); **ran(A)=3**.

b) $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 \\ 8 & 0 & a \end{bmatrix}$; $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 \\ 8 & 0 & a \end{vmatrix}_* = a^3 - 9a$; $\quad a^3 - 9a = 0 \rightarrow a = 0, \pm 3$

Si $a \neq 0 \quad y \quad a \neq \pm 3$, entonces ran (A) = 3

Si a = 0, A = $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{f_3 = 8f_2}$; ran(A) = 2

Si a = 3, A = $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 8 & 0 & 3 \end{bmatrix}$; ran(A) = 2 (el determinante de orden tres ya estaba hecho en *)

Si a = -3, A = $\begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 8 & 0 & -3 \end{bmatrix}$; ran(A) = 2 (el determinante de orden tres ya estaba hecho en *)

c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & a & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 2 \\ a & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = a-2$; $\quad a-2=0 \rightarrow a=2$

**Si a$\neq$ 2, ran (A) = 3**

**Si a = 2**, $\quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, **ran ( A) = 3**

**Por lo tanto para cualquier a real, ran (A) = 3.**

d) $A = \begin{bmatrix} a+1 & 1 & 1 & a+1 \\ 1 & a+1 & 1 & a+3 \\ 1 & 1 & 1+a & -2a-4 \end{bmatrix}$; $\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \end{vmatrix}_* = (a+1)^3 + 2 - 3(a+1) = a^3 + 3a^2$

$a^3 + 3 \cdot a^2 = 0 \rightarrow \quad a = 0$ (doble) y a = -3

**Si** $a \neq 0 \quad y \quad a \neq -3$ **, entonces ran(A) = 3**

**Si a = 0**, A = $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ y **ran (A) = 2** (las tres primeras columnas son iguales)

**Si a = -3**, A = $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$; $\begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$ **ran (A) =2** (el otro determinante de orden tres ya estaba hecho en *)

e) A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 & 7 \\ 5 & -(a+1) & 7 & 8+a \end{pmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} \neq 0;$ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 & 7 \\ 5 & -(a+1) & 7 & 8+a \end{vmatrix} \begin{matrix} f_2 - 2f_1 \\ f_3 - 3f \\ f_4 - 5f_1 \end{matrix} =$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & -6 & 1 & -2 \\ 0 & -a-6 & 2 & a-7 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 & -2 \\ -6 & 1 & -2 \\ -a-6 & 2 & a-7 \end{vmatrix} = 3a - 9; \quad 3a - 9 = 0 \rightarrow a = 3$$

**Si a** $\neq$ **3, ran (A) = 4** **y** **si a = 3, ran (A) = 3.**

f) A = $\begin{bmatrix} 1 & a & 1 & a+2 \\ 1 & 1 & a & -2(a+1) \\ a & 1 & 1 & a \end{bmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}_* = a^3 - 3a + 2; \quad a^3 - 3a + 2 = 0 \rightarrow a = 1(doble), a = -2$

**Si** $a \neq 1 \quad y \quad a \neq -2,$ **ran (A) = 3**

**Si a = 1**, A = $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, **ran (A) = 2**(las tres primeras columnas son iguales)

**Si a = -2**, A = $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$; $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0,$ **ran (A) = 3** ( el otro determinante de orden tres ya está hecho en *)